

2.2 | 연습문제 정답

01. f 는 모든 실수에서 연속이다.

02. f 는 모든 실수에서 연속이다.

03. f 는 모든 실수에서 연속이다.

04. f 는 $x \neq a$ 인 모든 실수에서 연속이다.

05. f 가 $x = a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이다. 즉 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$.

$$|f(x) - f(a)| \geq ||f(x)| - |f(a)|| \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} ||f(x)| - |f(a)|| \leq \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$$

$$\Rightarrow \text{조임 정리에 의해 } \lim_{x \rightarrow a} ||f(x)| - |f(a)|| = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|$ 이고 $|f(x)|$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.

06. $K = 4$

07. $f(x) = x - \tan x$ 는 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 연속이고 ($\because$ 다항함수(연속함수)-다항함수 삼각함수(연속함수))

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} + 1 > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0 \quad (\because \pi < 4)$$

따라서 사잇값 정리에 의해 방정식 $x - \tan x = 0$ 은 $-\frac{\pi}{4}$ 와 $\frac{\pi}{4}$ 에서 적어도 한 개의 실근을 가진다.

08. $f(x) = \sin x - x \cos x$ 는 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 에서 연속($\because$ 다항함수(연속함수)-다항함수 삼각함수(연속함수))

$$f(\pi) = \sin \pi - \pi \cos \pi = \pi > 0, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2} = -1 < 0$$

따라서 사잇값 정리에 의해 방정식 $\sin x - x \cos x = 0$ 는 π 과 $\frac{3\pi}{2}$ 사이에 적어도 하나의 해를 가진다.

09. $c = \sqrt{10}$

10. $f(x) = x^5 + x - 10$ 이라 두면 f 는 $[1, 2]$ 에서 연속이다.($\because$ 주어진 구간에서 연속인 다항함수 이므로)

$f(1) = 1 + 1 - 10 = -8 < 0, f(2) = 32 + 2 - 10 = 24 > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $f(c) = 0$ 되는 해 c 가 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.

11. $g(x) = f(x) - x$ 라 두면 $g(x)$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속($\because f$ 와 x 가 $[0, 1]$ 에서 연속)
 $g(0) = f(0) - 0 > 0$ ($\because 0 < f(0) < 1$), $g(1) = f(1) - 1 < 0$ ($\because 0 < f(1) < 1$)이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = 0$, 즉 $f(c) = c$ 인 c 가 0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다.

12. 0과 $2a$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

13. $f(x) = \tan^{-1} x - x$ 는 $[-1, 1]$ 에서 연속(역삼각함수, 다항함수의 합이므로)이고 $f(-1) = -\frac{\pi}{4} + 1 > 0, f(1) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $f(c) = 0$ 을 만족하는 $c \in (-1, 1)$ 가 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $\tan^{-1} x = x$ 는 -1 과 1 사이에 적어도 하나의 실근을 가진다.

14. $-\frac{\pi}{3} < a < -\frac{(3 - \sqrt{2})\pi}{6}$

15. (i) $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이다.

(ii) 임의의 실수 a 에 대해 조건에 의해

$$f(x) = f(x-a+a) = f(x-a) + f(a) \text{이므로}$$

$$f(x) = f(x-a) + f(a) \text{이다.}$$

(iii) 조건에 의해 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x-a) + f(a)] \quad (\because \text{(ii)에 의해})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x-a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} f(u) + f(a) \quad (\because u = x-a)$$

$$= f(0) + f(a) \quad (\because \text{(i)에 의해})$$

$$= f(a) \quad (\because \text{(iii)에 의해})$$

따라서 $f(x)$ 는 임의의 실수 a 에서 연속이다.